冬期講習　難関大　理系数学

目　次

第１講　基本計算 ―― p.2
第２講　漸化式と極限 ―― p.3
第３講　回転体の体積（その１）―― p.4
第４講　回転体の体積（その２）―― p.5
第５講　絶対値付き積分 ―― p.6
第６講　複素数 ―― p.7

第１講　基本計算

1　［A］　次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)e^x\log x\,dx$

［B］　次の問いに答えよ．ただし，e は $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ で定められる無理数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)+\log(n+2)+\log(n+3)+\cdots+\log(n+2n)-2n\log n}{n}$ を求めよ．

テキスト解答

第１講　基本計算

1 ［A］ 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)e^x\log x\,dx$

［B］ 次の問いに答えよ．ただし，e は $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ で定められる無理数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)+\log(n+2)+\log(n+3)+\cdots+\log(n+2n)-2n\log n}{n}$ を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $\dfrac{2-2\log 2+\pi}{4}$　(2) $\log\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}$　(3) $\dfrac{8}{105}$　(4) $(2\log 2-1)e^2+e$

［B］ (1) 略　(2) 略　(3) $3\log 3-2$

【解説】 ［A］ (1) $\dfrac{x^3+1}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$ であり

$$\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1-\log 2}{2}$$

と

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

より $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+1}{x^2+1}dx=\frac{2-2\log 2+\pi}{4}$

(2) $$\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}dx=\left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+\frac{1}{x+2}\right]_0^1$$

$$=\log\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$$

(3) $t=\cos x$ と置換積分することにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^2 x\,dx=\int_0^1(t^2-2t^4+t^6)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^7}{7}\right]_0^1=\frac{8}{105}$$

(4) $\displaystyle\int_1^2(x+1)e^x\log x\,dx=\Big[(x\log x-1)e^x\Big]_1^2=(2\log 2-1)e^2+e$

［B］ (1)　$e^x-1=t$ とおくと $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{t}{\log(1+t)}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}=1$

(2)　$f(t)=e^t-t$ とおくと $f'(t)=e^t-1$ より，$t>0$ において $f'(t)>0$ であることと $f(0)>0$ より，$t>0$ において $f(t)>0$ つまり $e^t>t$.

ここで $t=\dfrac{x}{2}$ とおくと，$x>0$ であり，$e^{\frac{x}{2}}>\dfrac{x}{2}$ $\iff$ $e^x>\dfrac{x^2}{4}$ つまり $\dfrac{4}{x}>\dfrac{x}{e^x}>0$ を得る.

これと $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

(3)　(与式)$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^2\log(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^2$

$=3\log3-2$